

Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

VON

Heino Jürg Meili

von Russikon (Zürich)

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. Rolf Nevanlinna



Zürich 1954

Dissertationsdruckerei Leemann AG



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507227_0073

Über das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT II

DER

UNIVERSITÄT ZÜRICH

VON

Heino Jürg Meili

von Russikon (Zürich)

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. Rolf Nevanlinna



Zürich 1954

Dissertationsdruckerei Leemann AG



MEINEN LIEBEN ELTERN

GEWIDMET

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
I. Die Carlemanschen Sätze für die Halbebene	11
II. Verallgemeinerung der Carlemanschen Sätze auf allgemeinere Gebiete	19
III. Eine Anwendung der Ahlforsschen Verzerrungssätze	27
IV. Verallgemeinerung der Carlemanschen Sätze auf Warschawski-Gebiete	34

Einleitung

Den Begriff der asymptotischen Reihen, welcher von *Poincaré* eingeführt wurde, können wir folgendermaßen erklären:

Es sei gegeben ein Gebiet G der $w = u + iv$ -Ebene mit dem Randpunkt w_0 , eine in G regulär analytische Funktion $f(w)$ und eine beliebige Folge von komplexen Zahlen:

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

Man definiert, $f(w)$ lasse sich in die asymptotische Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v (w - w_0)^v \tag{1}$$

entwickeln, wenn für $n = 0, 1, 2, \dots$ die Beziehung

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - \sum_{v=0}^{n-1} c_v (w - w_0)^v}{(w - w_0)^n} = c_n \quad (w \text{ in } G) \tag{2}$$

gilt.

Die Reihe (1) konvergiert für $w \neq w_0$ im allgemeinen nicht.

Im Zusammenhang mit der Theorie der asymptotischen Reihen hat *Carleman* das folgende Problem gestellt:

Ein Gebiet G der w -Ebene mit dem Randpunkt w_0 , eine beliebige Folge von komplexen Zahlen

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

und eine beliebige Folge von positiven Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

seien gegeben. Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen die a_n erfüllen, damit für zwei in G regulär analytische Funktionen $f_1(w)$ und $f_2(w)$, für welche zwei positive Zahlen k_1 und k_2 derart existieren, daß die Relationen

$$\left| \frac{f_1(w) - \sum_{v=0}^{n-1} c_v (w-w_0)^v}{(w-w_0)^n} \right| \leq k_1^n \cdot a_n^n \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots, \\ w \text{ in } G \end{array} \right) \quad (3)$$

und

$$\left| \frac{f_2(w) - \sum_{v=0}^{n-1} c_v (w-w_0)^v}{(w-w_0)^n} \right| \leq k_2^n \cdot a_n^n \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots, \\ w \text{ in } G \end{array} \right) \quad (4)$$

gelten, $f_1(w) \equiv f_2(w)$ folgt?

Existieren zu zwei in G regulär analytischen Funktionen $f_1(w)$ und $f_2(w)$ zwei positive Zahlen k_1 und k_2 derart, daß die Beziehungen (3) bzw. (4) gelten, so folgt für die Differenz $f_1(w) - f_2(w) \equiv F(w)$:

$$\left| \frac{F(w)}{(w-w_0)^n} \right| \leq (k_1^n + k_2^n) \cdot a_n^n \leq (k_1 + k_2)^n \cdot a_n^n \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, \dots, \\ w \text{ in } G \end{array} \right) \quad (5)$$

Daher kann dasselbe Problem einfacher formuliert werden:

Welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen die a_n unterworfen werden, damit für eine in G regulär analytische Funktion $F(w)$, zu der eine positive Zahl k so existiert, daß für $n = 0, 1, 2, \dots$ und für jedes w in G die Beziehungen

$$\left| \frac{F(w)}{(w-w_0)^n} \right| \leq k^n \cdot a_n^n \quad (6)$$

gelten, $F(w) \equiv 0$ folgt?

Dieses Problem ist das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen oder das W -Problem. Wir dürfen für die Folge a_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad (7)$$

voraussetzen. Ist nämlich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$, so folgt für eine in G regulär

analytische Funktion $F(w)$ aus dem Bestehen der Relationen (6) für jedes w von G in einer hinreichend kleinen Umgebung des Randpunktes w_0 $F(w)=0$ und daraus das identische Verschwinden.

Carleman beantwortet diese Frage in seiner 1926 veröffentlichten Schrift¹⁾ vollständig für den Fall, daß G der Kreis $|w| < 1$ ist. Er beweist folgende beiden Sätze:

Satz 1. *Hinreichende Bedingung dafür, daß für eine im Kreise $|w| < 1$ regulär analytische Funktion $F(w)$ aus dem Bestehen der Relationen (6) das identische Verschwinden folgt, ist, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^*} \quad (8)$$

divergiert, unter a_n^ die Fabersche Minorante der Folge a_n , d. h. die Folge*

$$a_n^* = \inf_{\nu \geq n} a_{\nu} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

verstanden.

Satz 2. *Konvergiert die Reihe (8), so existiert eine im Einheitskreise regulär analytische Funktion $F(w)$, welche nicht identisch verschwindet und für eine geeignete positive Zahl k die Bedingungen (6) erfüllt.*

Mit Hilfe konformer Abbildung zeigt *Carleman*, daß für die Halbebene $u > 0$ die Lösung des Eindeutigkeitsproblems dieselbe ist wie für den Einheitskreis.

In seiner drei Jahre später erschienenen Abhandlung²⁾ beweist *A. Ostrowski* die beiden Carlemanschen Sätze wesentlich einfacher, indem er die unendlich vielen Bedingungen (6) zu einer einzigen zusammenfaßt:

$$|F(w)| \leq \text{Inf. } (k a_n)^n \cdot |w - w_0|^n \equiv \frac{1}{T\left(\frac{1}{|w - w_0|}\right)} \quad (9)$$

Mit $T(r)$ bezeichnet er die für $r > 0$ definierte, stetige und monotone Funktion

¹⁾ Vgl. *T. Carleman* [1].

²⁾ Vgl. *A. Ostrowski* [1].

$$T(r) \equiv \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{(ka_n)^n} \quad (10)$$

So findet *Ostrowski* eine sehr elegante Lösung des Eindeutigkeitsproblems für den Fall des Kreises $|w| < 1$:

Wenn das Integral

$$\int_1^{\infty} \log T(r) \frac{dr}{r^2} \quad (11)$$

divergiert, verschwindet eine im Einheitskreise regulär analytische Funktion $F(w)$ mit den verlangten Eigenschaften identisch, und im Falle der Konvergenz dieses Integrals läßt sich eine im Einheitskreise regulär analytische Funktion konstruieren, welche die Bedingungen (6) erfüllt, ohne identisch zu verschwinden.

Schließlich zeigt *Ostrowski*, daß das Integral (11) und die Reihe (8) gleichzeitig konvergieren und divergieren.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit beweisen wir die beiden Carlemanschen Sätze für die Halbebene, wobei wir vor allem beim Beweise des zweiten Satzes ähnlich vorgehen wie *Ostrowski*.

Im zweiten Kapitel verallgemeinern wir die Carlemanschen Sätze. Wir beweisen zwei den Carlemanschen Sätzen entsprechende Sätze für allgemeinere Gebiete.

In Kapitel III wenden wir die Verzerrungssätze von *Ahlfors* an, um die Carlemanschen Sätze zu verallgemeinern³⁾.

In Kapitel IV wollen wir untersuchen, wie lange die Lösung des Eindeutigkeitsproblems dieselbe bleibt wie für die Halbebene (und den Einheitskreis), wenn wir G von der Halbebene abweichen

³⁾ In seinem 1952 erschienenen Buche „Séries adhérentes, Régularisations des suites, Applications“ (Gauthier-Villars, Paris) wendet *S. Mandelbrojt* die Verzerrungssätze von *Ahlfors* an, um das Eindeutigkeitsproblem in der Theorie der asymptotischen Reihen für gewisse einfach zusammenhängende Gebiete zu behandeln. Dieses Buch wurde mir jedoch erst bekannt, als ich die Bearbeitung des dritten Kapitels meiner Arbeit, das sich ebenfalls mit der Anwendung der Ahlforsschen Verzerrungssätze befaßt, bereits abgeschlossen hatte. Die Ausführungen dieses Kapitels entstanden ganz unabhängig von *Mandelbrojt*.

lassen. Wir finden, daß für ein Warschawski-Gebiet dieselben Carlemanschen Sätze gelten wie für die Halbebene.

In seiner Dissertation⁴⁾ beweist *S. Warschawski* einen Satz über die konforme Abbildung eines gewissen einfach zusammenhängenden Gebietes der w -Ebene⁵⁾ auf den Kreis $|z-1| < 1$ der z -Ebene:

Ist $z = z(w)$ eine Funktion, welche das von Warschawski definierte Gebiet derart konform auf den genannten Kreis der z -Ebene abbildet, daß ein bestimmter Randpunkt w_0 in den Punkt $z=0$ übergeht, so existieren zwei von w unabhängige, positive Zahlen c_1 und c_2 derart, daß für jedes w des Gebietes die Beziehung

$$(0 <) c_1 \leq \left| \frac{z(w)}{w - w_0} \right| \leq c_2 (< \infty) \quad (12)$$

gilt.

Mit Hilfe dieses Satzes könnte man direkt zeigen, daß für ein Warschawski-Gebiet die Lösung des Eindeutigkeitsproblems dieselbe ist wie für die Halbebene. Wir beweisen jedoch diese Tatsache ganz unabhängig vom Warschawskischen Satze, indem wir die Resultate von Kapitel III anwenden.

I. Die Carlemanschen Sätze für die Halbebene

§ 1. Der erste Carlemansche Satz

1.1. Der erste Satz von *Carleman* lautet:

Satz 1.1. *Die Funktion $\Phi(\zeta)$ ($\zeta = \xi + i\eta$) sei in der Halbebene $\xi > 0$ regulär analytisch und befriedige für $n=0, 1, 2, \dots$ die Ungleichungen*

$$|\Phi(\zeta)| \leq a_n \cdot |\zeta|^n, \quad (1.1)$$

wobei die a_n eine monotone Zahlenfolge bilden:

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

⁴⁾ Vgl. *S. Warschawski* [1].

⁵⁾ Vgl. S. 34/35.

Außerdem divergiere die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \quad (1.2)$$

Unter diesen Voraussetzungen verschwindet $\Phi(\zeta)$ identisch.

1.2. Hilfssatz. Zum Beweise des Satzes benützen wir folgenden Hilfssatz:

Wir setzen voraus:

1. Die Funktion $f(\zeta)$ sei für $\xi > 0$ regulär analytisch und dem Betrage nach höchstens gleich 1.
2. Auf der imaginären Achse sei eine reelle Funktion $v(\eta)$ in folgender Weise definiert:

Für die ganze Zahl N sei gegeben eine monotone Zahlenfolge

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_{N+1} = 0$$

und eine beliebige Zahlenfolge $v_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots, N$). Man setze

$$\begin{cases} v(\eta) = v_n & \text{für } \eta_n \geq \eta > \eta_{n+1} \ (n=1, 2, \dots, N), \\ v(\eta) = 0 & \text{für } \eta > \eta_1 \text{ und } \eta \leq 0. \end{cases}$$

3. Es gelte für jedes $\zeta = i\eta$:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \log \frac{1}{|f(i\eta)|} \geq v(\eta) \quad (1.3)$$

Dann gilt für $\xi > 0$ die Ungleichung:

$$\log \frac{1}{|f(\xi)|} \geq \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + 1)} \sum_{n=1}^N \eta_n (v_n - v_{n-1}) \quad (1.4)$$

Beweis: Das harmonische Maß $\omega(\zeta, \eta_0)$ des Halbstrahls $\eta \leq \eta_0$ der imaginären Achse im Punkte ζ in bezug auf die Halbebene $\xi > 0$ ist gleich dem durch π dividierten Winkel, unter dem dieser Halbstrahl von ζ aus gesehen wird.



Das Integral

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} v(\eta) d\omega(\zeta, \eta) \quad (1.5)$$

ist eine reguläre, beschränkte Potentialfunktion für $\xi > 0$. Für $\zeta \rightarrow i\eta$ strebt sie gegen $v(\eta)$, mit Ausnahme der Punkte $\zeta = i\eta_n$ ($n = 1, 2, \dots, N+1$).

Daraus folgt mit Rücksicht auf Voraussetzung 3 für die in der Halbebene $\xi > 0$ reguläre Potentialfunktion

$$u(\zeta) \equiv \log \frac{1}{|f(\zeta)|} - \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} v(\eta) d\omega(\zeta, \eta), \quad (1.6)$$

daß $\lim u(i\eta) \geq 0$ ist in jedem Randpunkte, außer höchstens den endlich vielen Punkten $\zeta = i\eta_n$, in denen diese untere Grenze jedenfalls größer als eine endliche Konstante bleibt. Nach dem erweiterten Minimumprinzip⁶⁾ folgt für $\xi > 0$, daß

$$u(\zeta) \geq 0 \text{ ist.}$$

Für einen Punkt $\zeta = \xi > 0$ ist das harmonische Maß

$$\omega(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \cdot \arctg \frac{\xi}{\eta}, \quad (1.7)$$

und also

$$d\omega = \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + \eta^2)} d\eta \geq \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + 1)} d\eta \quad (1.8)$$

für $d\eta > 0$ und $0 \leq \eta \leq 1$. Es wird daher

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} v(\eta) d\omega(\xi, \eta) = \int_{\eta=0}^1 v(\eta) d\omega(\xi, \eta) \geq \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + 1)} \int_{\eta=0}^1 v(\eta) d\eta, \quad (1.9)$$

und mit Hilfe partieller Integration finden wir:

$$\int_{\eta=0}^1 v(\eta) d\eta = \int_{\eta=1}^0 \eta dv(\eta) = \sum_{n=1}^N \eta_n (v_n - v_{n-1}) \quad (1.10)$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

⁶⁾ Vgl. R. Nevanlinna [1], S. 134.

1.3. Beweis des ersten Carlemanschen Satzes. Wir sind jetzt in der Lage zu beweisen, daß die Divergenz von (1.2) das identische Verschwinden der Funktion $\Phi(\zeta)$ zur Folge hat. Es genügt zu zeigen, daß für ein beliebiges $\xi > 0$ $\Phi(\xi) = 0$ ist. Dazu wenden wir unseren Hilfssatz an.

Aus (1.1) folgt für $n = 0$:

$$|\Phi(\xi)| \leq 1.$$

Wir wählen $\eta_n = \frac{1}{e a_n}$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Dann folgt aus (1.1) für $|\eta| \leq \eta_n$ und $n = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \liminf \log \frac{1}{|\Phi(i\eta)|} &\geq -n(\log a_n + \log |\eta|) \\ &\geq -n(\log a_n + \log \eta_n) = n \equiv v_n (> 0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Wegen (1.4) erhalten wir für $\xi > 0$:

$$\log \frac{1}{|\Phi(\xi)|} \geq \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + 1)} \sum_{n=1}^N \eta_n (v_n - v_{n-1}) = \frac{\xi}{e \cdot \pi(\xi^2 + 1)} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} \quad (1.12)$$

Lassen wir schließlich N gegen ∞ streben, so folgt aus der Divergenz der Reihe (1.2):

$$\Phi(\xi) = 0.$$

§ 2. Der zweite Carlemansche Satz

1.4. Der zweite Carlemansche Satz enthält folgende Umkehrung des ersten:

Satz 1.1. *Die Reihe (1.2) sei konvergent. Unter dieser Voraussetzung existiert eine in der Halbebene $\xi > 0$ regulär analytische, nicht identisch verschwindende Funktion $\Phi(\zeta)$, welche die Ungleichungen (1.1) befriedigt.*

Es sei für $r > 0$:

$$m(r) \equiv \inf_{n \geq 0} a_n^n \cdot r^n \quad (1.13)$$

Man erkennt, daß $m(r)$ höchstens gleich 1 ist, mit abnehmendem r monoton abnimmt und gegen 0 strebt, falls r gegen 0 strebt. Ferner läßt sich zeigen, daß $m(r)$ für jedes $r > 0$ stetig ist.

Es sei gegeben eine beliebige monoton fallende Zahlenfolge

$$1 > \delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n > \dots \quad (1.14)$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

Das Integral

$$U_n(\zeta) \equiv - \int_{\eta=-1}^{-\delta_n} \log m(|\eta|) d\omega(\zeta, \eta) - \int_{\eta=\delta_n}^{+1} \log m(\eta) d\omega(\zeta, \eta)$$

ist eine für $\xi > 0$ reguläre Potentialfunktion. Aus den Eigenschaften von $m(r)$ und der Folge δ_n geht hervor, daß $U_n(\zeta)$ für jedes ζ der Halbebene $\xi > 0$ nichtnegativ und die Funktionenfolge $U_1(\zeta)$, $U_2(\zeta)$, ... monoton wachsend ist:

$$U_1(\zeta) \leq U_2(\zeta) \leq \dots \leq U_n(\zeta) \leq \dots$$

Wenn wir zeigen können, daß diese Folge in einem Punkte $\zeta = \zeta_0$ der Halbebene $\xi > 0$ gegen einen endlichen Grenzwert $U(\zeta_0)$ strebt, so gilt dasselbe nach dem Harnackschen Prinzip für jedes ζ dieser Halbebene, und die Grenzfunktion $U(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\zeta)$ ist in dieser Halbebene harmonisch.

Nehmen wir diese Voraussetzung als erfüllt an, so existiert eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte, zu $U(\zeta)$ konjugierte harmonische Funktion $V(\zeta)$. Die Funktion

$$\Phi(\zeta) \equiv e^{-U(\zeta) - iV(\zeta)} \quad (1.15)$$

ist in der Halbebene $\xi > 0$ regulär analytisch und verschwindet nirgends.

Wir behaupten, daß sie tatsächlich die Ungleichungen (1.1) befriedigt. Wir haben also zu beweisen, daß für $N=0, 1, 2, \dots$ und für ein beliebiges ζ der Halbebene $\xi > 0$ die Beziehung

$$-\log |\Phi(\zeta)| \equiv U(\zeta) \geq -\log(a_N^N \cdot |\zeta|^N) \quad (1.16)$$

gilt.

Die Funktion $-\log(a_N^N \cdot |\zeta|^N)$ kann dargestellt werden mit dem Poissonschen Integral:

$$-\log (a_N^N \cdot |\zeta|^N) = - \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \log (a_N^N \cdot |\eta|^N) d\omega (\zeta, \eta) \quad (1.17)$$

(Die Stellen 0 und ∞ stören nicht.)

Das Integral

$$u(\zeta) \equiv - \int_{\eta=-1}^1 \log (a_N^N \cdot |\eta|^N) d\omega (\zeta, \eta) \quad (1.18)$$

ist für $\xi > 0$ konvergent, und mit Rücksicht auf (1.17) gilt wegen $a_N^N \cdot |\eta|^N \geq 1$ für $|\eta| \geq 1$:

$$u(\zeta) \geq -\log (a_N^N \cdot |\zeta|^N). \quad (1.19)$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß für jedes ζ der Halbebene $\xi > 0$

$$U(\zeta) \geq u(\zeta) \quad (1.20)$$

gilt. Nehmen wir wieder die Zahlenfolge (1.14) und bilden wir die Funktionenfolge

$$u_n(\zeta) \equiv - \int_{\eta=-1}^{-\delta_n} \log (a_N^N \cdot |\eta|^N) d\omega (\zeta, \eta) - \int_{\eta=\delta_n}^1 \log (a_N^N \cdot |\eta|^N) d\omega (\zeta, \eta), \quad (1.21)$$

so ist diese Folge von einem gewissen $n = n_1$ an monoton wachsend, und ihr Grenzwert ist $u(\zeta)$.

Für $n = 1, 2, \dots$ gilt:

$$U_n(\zeta) \geq u_n(\zeta). \quad (1.22)$$

Bilden wir nämlich die Differenz

$$\begin{aligned} U_n(\zeta) - u_n(\zeta) = & - \int_{\eta=-1}^{-\delta_n} [\log m(|\eta|) - \log (a_N^N \cdot |\eta|^N)] d\omega (\zeta, \eta) \\ & - \int_{\eta=\delta_n}^1 [\log m(|\eta|) - \log (a_N^N \cdot |\eta|^N)] d\omega (\zeta, \eta), \end{aligned} \quad (1.23)$$

so ist nach Definition der Funktion $m(r)$ der Integrand der beiden Integrale von (1.23) überall höchstens gleich 0, und daraus ergibt sich die Relation (1.22).

Für die Grenzwerte $U(\zeta)$ bzw. $u(\zeta)$ der beiden Funktionenfolgen $U_n(\zeta)$ und $u_n(\zeta)$ folgt daher (1.20), und wegen (1.19):

$$-\log |\Phi(\zeta)| \equiv U(\zeta) \geq u(\zeta) \geq -\log(a_N^N \cdot |\zeta|^N).$$

1.5. Wir haben noch zu zeigen, daß die Folge $U_n(\zeta)$ in einem Punkte $\zeta = \zeta_0$ der Halbebene $\xi > 0$ mit wachsendem n tatsächlich gegen einen endlichen Grenzwert strebt. Wir zeigen dies für den Punkt $\zeta = 1$. Wegen

$$d\omega = \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + \eta^2)} d\eta \leq \frac{1}{\pi\xi} d\eta \quad (1.24)$$

für $d\eta > 0$ gilt:

$$U_n(1) \leq \frac{2}{\pi} \int_{\delta_n}^1 -\log m(\eta) d\eta. \quad (1.25)$$

Um zu zeigen, daß das Integral von (1.25) gegen einen endlichen Grenzwert strebt, falls δ_n gegen 0 strebt, führen wir die Hilfsfunktion

$$A(r) \equiv \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt \quad (1.26)$$

ein. Unter $n(t)$ verstehen wir die Anzahl $a_n \leq \frac{1}{t}$. Mit Hilfe partieller Integration finden wir für $0 < r < 1$:

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt = \int_r^1 n(t) d \log t = \\ &= \log t \cdot n(t) \Big|_r^1 - \int_r^1 \log t \cdot dn(t) = \\ &= -\log r \cdot n(r) - \log a_1 - \log a_2 - \dots - \log a_{n(r)} = \\ &= -\log(r^{n(r)} \cdot a_1 \cdot a_2 \dots a_{n(r)}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Aus der Definition von $m(r)$ folgt für $0 < r < 1$:

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n(r)} \cdot r^{n(r)} < m(r) \quad (1.28)$$

oder

$$-\log m(r) < -\log(a_1 \cdot a_2 \dots a_{n(r)} \cdot r^{n(r)}) = A(r). \quad (1.29)$$

Daher konvergiert das Integral

$$\int_0^1 -\log m(r) dr, \quad (1.30)$$

wenn

$$\int_0^1 A(r) dr \quad (1.31)$$

konvergiert.

Es bleibt noch zu beweisen, daß aus der Konvergenz der Reihe (1.2) die Konvergenz des Integrals (1.31) folgt. Nach Definition der Funktion $n(t)$ ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \int_{r=1}^0 r \cdot dn(r) \quad (1.32)$$

Für $0 < \delta < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &> \int_{r=1}^{\delta} r \cdot dn(r) = r \cdot n(r) \Big|_{r=1}^{\delta} - \int_1^{\delta} n(r) dr \geq \\ &\geq \int_{\delta}^1 n(r) dr - n(1), \end{aligned} \quad (1.33)$$

und deshalb schließen wir aus der Konvergenz der Reihe (1.2), daß das Integral

$$\int_0^1 n(r) dr \quad (1.34)$$

konvergiert. Weiter finden wir mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 A(r) dr &= r \cdot A(r) \Big|_{r=\delta}^1 - \int_{\delta}^1 r \cdot dA(r) = \\ &= r \cdot A(r) \Big|_{r=\delta}^1 + \int_{\delta}^1 n(r) dr. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Wegen $A(\delta) \cdot \delta > 0$ folgt aus der Konvergenz des Integrals (1.34) die Konvergenz von (1.31). Damit ist alles bewiesen.

§ 3. Bemerkung zu den Carlemanschen Sätzen

1.6. Wir können die Carlemanschen Sätze noch etwas verallgemeinern. Von der Zahlenfolge a_n wollen wir lediglich voraussetzen, daß

$$a_0 = 1,$$

$$a_n \geq 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ gilt.}$$

Die Sätze 1.1 und 1.2 bleiben richtig, wenn man die Reihe (1.2) durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^*} \quad (1.36)$$

ersetzt, unter der Folge a_n^* die Fabersche Minorante der a_n , d. h. die monotone Folge

$$a_n^* = \inf_{\nu \geq n} a_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.37)$$

verstanden.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß aus

$$|\Phi(\zeta)| \leq a_n^n \cdot |\zeta|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

folgt:

$$|\Phi(\zeta)| \leq a_n^{*n} \cdot |\zeta|^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.38)$$

und umgekehrt.

II. Verallgemeinerung der Carlemanschen Sätze auf allgemeinere Gebiete

§ 1. Verallgemeinerung des ersten Carlemanschen Satzes

2.1. In diesem Kapitel stellen wir uns die Aufgabe, die beiden Carlemanschen Sätze zu verallgemeinern. Wir wollen die Halbebene ersetzen durch ein allgemeineres Gebiet und notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß eine Funktion, welche in diesem Gebiete regulär analytisch ist und die Bedingungen (1.1) erfüllt, identisch verschwindet.

Unter G verstehen wir im folgenden ein einfach zusammenhängendes Gebiet der $w = u + iv$ -Ebene, welches von einer Jordankurve Γ begrenzt ist, den Nullpunkt als Randpunkt hat und folgende Bedingungen erfüllt:

1. G liegt symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.
2. Jeder Kreis um 0 mit Radius r ($0 < r \leq 1$) hat mit der Randkurve Γ genau zwei Schnittpunkte, welche in bezug auf die reelle Achse symmetrisch liegen.

Die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Randkurve Γ seien A und B . Die Kurvenstücke von Γ zwischen 0 und A bzw. zwischen 0 und B seien Γ_1 bzw. Γ_2 . G läßt sich derart konform auf die Halbebene $\xi > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) abbilden, daß sich die beiden Nullpunkte entsprechen und konjugierte Werte w in konjugierte Werte ζ und die Punkte A und B in die Punkte i bzw. $-i$ übergehen. $\zeta = \zeta(w)$ sei eine Funktion, welche eine solche Abbildung liefert. w sei ein Punkt von Γ_1 , $i\eta = \zeta(w)$ sein Bildpunkt. Aus Bedingung 2 folgt, daß η eine im Intervalle $0 \leq r \leq 1$ eindeutige, stetige und monoton wachsende Funktion von r ist, falls wir mit r den Betrag von w bezeichnen.

$$\eta = \eta(r) \quad (2.1)$$

Als weitere Bedingung fügen wir hinzu, daß sich G so abbilden lasse, daß die oben definierte Funktion $\eta = \eta(r)$ folgende Voraussetzungen erfüllt:

3. a) $\eta(r)$ ist im Intervalle $0 < r \leq 1$ einmal stetig differenzierbar.
- b) Es existieren zwei von r unabhängige, positive Zahlen $q > 1$ und B so, daß für jedes r in diesem Intervalle

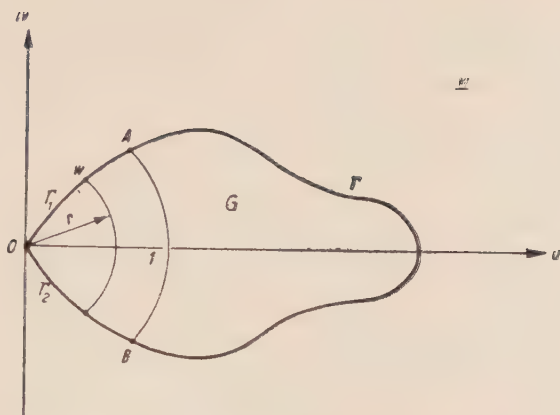
$$\frac{\eta(r)}{\eta\left(\frac{r}{q}\right)} \leq B \quad (2.2)$$

gilt.

- c) Es existiert eine von r unabhängige, positive Zahl C derart, daß im ganzen Intervalle

$$\eta'(r) \geq C \cdot \frac{\eta(r)}{r} \quad (2.3)$$

gilt.



2.2. Für das Gebiet G gilt folgende Verallgemeinerung des ersten Carlemanschen Satzes:

Satz 2.1. Die Funktion $F(w)$ sei in G regulär analytisch und befriedige die Ungleichungen

$$|F(w)| \leq a_n \cdot |w|^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

wobei die a_n eine monotone Zahlenfolge bilden:

$$I = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Außerdem sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(\frac{1}{a_n} \right) \quad (2.5)$$

divergent.

Unter diesen Voraussetzungen verschwindet $F(w)$ identisch.

Zum Beweise bilden wir G mit der Funktion $\zeta = \zeta(w)$ auf die Halbebene $\xi > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) ab und schreiben $F(w)$ als Funktion von ζ :

$$F(w) = F(w(\zeta)) \equiv \Phi(\zeta).$$

Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß für ein beliebiges $\xi > 0$ $\Phi(\xi) = 0$ ist. Um dies zu beweisen, wenden wir den Hilfssatz von 1.2 an.

Aus (2.4) folgt für $n=0$:

$$|\Phi(\xi)| \leq 1 \quad (\xi > 0).$$

Nun wählen wir

$$\eta_n = \eta \left(\frac{1}{q \cdot a_n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

Dann folgt aus (2.4) für $\xi > 0$:

$$\log \frac{1}{|\Phi(\xi)|} \geq -n (\log a_n + \log |w(\xi)|), \quad (2.6)$$

und für $|\eta| \leq \eta_n$:

$$\begin{aligned} \lim \log \frac{1}{|\Phi(i\eta)|} &\geq -n (\log a_n + \log |w(i\eta)|) \geq \\ &\geq -n (\log a_n + \log |w(i\eta_n)|) = \\ &= n \cdot \log q \equiv v_n (> 0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nach (1.4) gilt für $\xi > 0$:

$$\log \frac{1}{|\Phi(\xi)|} \geq \frac{\xi}{\pi(\xi^2 + 1)} \cdot \sum_{n=1}^N \eta_n (v_n - v_{n-1}) = \frac{\xi \cdot \log q}{\pi(\xi^2 + 1)} \cdot \sum_{n=1}^N \eta_n. \quad (2.8)$$

Wegen (2.2) ist:

$$\eta_n = \eta \left(\frac{1}{q \cdot a_n} \right) \geq \frac{1}{B} \cdot \eta \left(\frac{1}{a_n} \right) \quad (2.9)$$

und daher

$$\log \frac{1}{|\Phi(\xi)|} \geq \frac{\xi \cdot \log q}{B \cdot \pi \cdot (\xi^2 + 1)} \cdot \sum_{n=1}^N \eta \left(\frac{1}{a_n} \right). \quad (2.10)$$

Lassen wir N gegen ∞ streben, so folgt aus der Divergenz von (2.5):

$$\Phi(\xi) = 0.$$

§ 2. Verallgemeinerung des zweiten Carlemanschen Satzes

2.3. Die Umkehrung von Satz 2.1 lautet:

Satz 2.2. Die Reihe (2.5) sei konvergent.

Dann existiert eine in G regulär analytische, nicht identisch verschwindende Funktion $F(w)$, welche die Ungleichungen (2.4) befriedigt.

Wir führen den Beweis wie in 1.4. $m(r)$ bedeute wieder die Funktion (1.13). Es sei ferner gegeben eine beliebige monoton fallende Zahlenfolge

$$1 > \delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n > \dots$$

mit
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Unter $U_n(\zeta)$ ($n=1, 2, \dots$) verstehen wir die in der Halbebene $\xi > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) reguläre Potentialfunktion

$$U_n(\zeta) \equiv - \int_{\eta=-1}^{-\delta_n} \log m(|w(i\eta)|) d\omega(\zeta, \eta) - \int_{\eta=\delta_n}^1 \log m(|w(i\eta)|) d\omega(\zeta, \eta). \quad (2.11)$$

$U_n(\zeta)$ ist in der ganzen Halbebene $\xi > 0$ nichtnegativ, und die Funktionenfolge $U_1(\zeta), U_2(\zeta), \dots$ monoton wachsend. Wenn diese Folge in einem Punkte $\zeta = \zeta_0$ dieser Halbebene gegen einen endlichen Grenzwert strebt, so gilt dies für die ganze Halbebene, und die Grenzfunktion

$$U(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\zeta)$$

ist harmonisch.

Nehmen wir die Folge als konvergent an, so existiert eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte, zu $U(\zeta)$ konjugierte Potentialfunktion $V(\zeta)$ ($\xi > 0$). Die Funktion

$$\Phi(\zeta) \equiv e^{-U(\zeta) - iV(\zeta)}$$

ist in der Halbebene $\xi > 0$ regulär analytisch und verschwindet nirgends in dieser Halbebene. Schreiben wir $\Phi(\zeta)$ als Funktion von w :

$$\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta(w)) \equiv F(w),$$

so erfüllt $F(w)$, wie eine ähnliche Überlegung wie in 1.4 zeigt, die Bedingungen (2.4).

2.4 Es soll noch gezeigt werden, daß die Folge $U_n(\zeta)$ in einem Punkte der Halbebene $\xi > 0$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt. Wir zeigen dies für den Punkt $\zeta = 1$. Es ist

$$U_n(1) = - \int_{\eta=1}^{-\delta_n} \log m(|w(i\eta)|) d\omega(1, \eta) - \int_{\delta_n}^1 \log m(|w(i\eta)|) d\omega(1, \eta) \quad (2.12)$$

Wegen $d\omega(1, \eta) = \frac{1}{\pi(1+\eta^2)} d\eta \leq \frac{1}{\pi} d\eta$ für $d\eta > 0$ strebt die Folge $U_n(\zeta)$ gegen einen endlichen Grenzwert, sobald das Integral

$$\int_{\eta=0}^1 -\log m(|w(i\eta)|) d\eta \quad (2.13)$$

konvergiert.

Um zu beweisen, daß aus der Konvergenz der Reihe (2.5) die Konvergenz des Integrals (2.13) folgt, benützen wir wieder die Hilfsfunktion

$$A(r) \equiv \int_r^1 \frac{n(t)}{t} dt,$$

wobei $n(t)$ die Anzahl $a_n \leq \frac{1}{t}$ bedeutet. Nach 1.5 gilt

$$-\log m(r) < A(r), \quad (1.29)$$

und folglich ist das Integral (2.13) konvergent, falls

$$\int_{\eta=0}^1 A(|w(i\eta)|) d\eta \quad (2.14)$$

konvergiert.

Für $1 > \delta > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(\frac{1}{a_n} \right) &\geq \int_{r=1}^{\delta} \eta(r) dn(r) = \eta(r) \cdot n(r) \Big|_1^{\delta} - \int_{r=1}^{\delta} n(r) d\eta(r) \geq \\ &\geq \int_{r=\delta}^1 n(r) d\eta(r) - n(1) = \int_{r=\delta}^1 n(r) \eta'(r) dr - n(1), \end{aligned} \quad (2.15)$$

und daher schließen wir aus der Konvergenz der Reihe (2.5), daß das Integral

$$\int_{r=\delta}^1 n(r) \eta'(r) dr \quad (2.16)$$

konvergiert.

Mit Hilfe partieller Integration finden wir für $1 > \delta > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{r=\delta}^1 A(r) d\eta(r) &= A(r) \eta(r) \Big|_{\delta}^1 - \int_{r=\delta}^1 \eta(r) dA(r) = \\ &= A(r) \eta(r) \Big|_{\delta}^1 + \int_{r=\delta}^1 n(r) \frac{\eta(r)}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wegen $A(\delta) \cdot \eta(\delta) > 0$ und

$$\frac{\eta(r)}{r} \leq \frac{1}{C} \cdot \eta'(r) \quad (2.3)$$

folgt aus der Konvergenz des Integrals (2.16) die Konvergenz von (2.14).

§ 3. Bemerkung zur Verallgemeinerung der Carlemanschen Sätze

2.5. In den Sätzen 2.1 und 2.2 können wir die Divergenz bzw. Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{1}{a_n}\right) \quad (2.5)$$

durch eine äquivalente Bedingung ersetzen. Wir beweisen folgenden Hilfssatz:

Unter den für G geltenden Voraussetzungen konvergieren und divergieren die Reihe (2.5) und das Integral

$$\int_0^1 -\log m(|w(i\eta)|) d\eta \quad (2.13)$$

gleichzeitig.

In 2.4 haben wir gezeigt, daß aus der Konvergenz der Reihe (2.5) die Konvergenz des Integrals (2.13) folgt. Wir haben daher nur noch zu beweisen, daß sich aus der Divergenz der Reihe (2.5) auch die Divergenz von (2.13) ergibt. Wegen

$$\eta(r) \leq B \cdot \eta\left(\frac{r}{q}\right), q > 1, \quad (2.2)$$

divergiert im Falle der Divergenz von (2.5) auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{1}{q \cdot a_n}\right) \quad (2.18)$$

Verstehen wir unter $n(r)$ wieder die Anzahl $a_n \leq \frac{1}{r}$, so gilt offenbar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{1}{q \cdot a_n}\right) = \int_{r=1}^0 \eta(r) d n(r q) \quad (2.19)$$

Aus der Divergenz des Integrals

$$\int_{r=1}^0 \eta(r) d n(r q) \quad (2.20)$$

schließen wir, daß auch

$$\int_{r=0}^1 n(r q) d \eta(r) \quad (2.21)$$

divergiert.

Mit Hilfe partieller Integration finden wir nämlich für $0 < \delta < 1$:

$$\int_{r=1}^{\delta} \eta(r) d n(r q) = \eta(r) \cdot n(r q) \Big|_{r=1}^{\delta} + \int_{r=\delta}^1 n(r q) d \eta(r). \quad (2.22)$$

Wäre nun (2.21) konvergent, so würde wegen der Monotonität der Funktion $n(r)$ die Beziehung

$$\int_{r=0}^{\delta} n(r q) d \eta(r) \geq n(\delta q) \int_{r=0}^{\delta} d \eta(r) = n(\delta q) \cdot \eta(\delta) \quad (2.23)$$

gelten, und deshalb würde der Ausdruck $n(\delta q) \cdot \eta(\delta)$ mit $\delta \rightarrow 0$ gegen 0 streben. Aus der Konvergenz von (2.21) würde daher die Konvergenz von (2.20) folgen.

Nach Definition der Funktion $m(r)$ gilt:

$$m(r) \leq (a_{n(rq)} \cdot r)^{n(rq)} \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{n(rq)}, \quad (2.24)$$

oder

$$-\log m(r) \geq n(rq) \cdot \log q. \quad (2.25)$$

Aus (2.25) erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{r=\delta}^1 -\log m(r) d\eta(r) \geq \log q \cdot \int_{r=\delta}^1 n(rq) d\eta(r). \quad (2.26)$$

Daher folgt aus der Divergenz von (2.21) die Divergenz von (2.13), und der Hilfssatz ist vollständig bewiesen.

2.6. Aus dem Hilfssatz von 2.5 ziehen wir folgenden Schluß:

Die Sätze 2.1 und 2.2 bleiben richtig, wenn wir die Reihe (2.5) durch das Integral (2.13) ersetzen. Die Divergenz dieses Integrals ist also notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für eine in G reguläre Funktion $F(w)$ das Bestehen der Relationen (2.4) das identische Verschwinden zur Folge hat. Diese Bedingung wurde zuerst von *Ostrowski* angegeben.

III. Eine Anwendung der Ahlfors'schen Verzerrungssätze

§ 1. Die Verzerrungssätze von Ahlfors

3.1. Um die Carlemanschen Sätze zu verallgemeinern, wollen wir die Verzerrungssätze von Ahlfors anwenden.

Unter einem Streifengebiet versteht Ahlfors ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω der $s = x + iy$ -Ebene, das folgende Bedingungen erfüllt:

1. Im Inneren von Ω liegt eine Kurve C mit der Gleichung $s = x(t) + iy(t)$, die für $0 < t < 1$ stetig ist und für die

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = -\infty$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = +\infty \text{ gilt.}$$

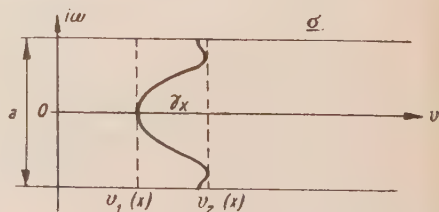
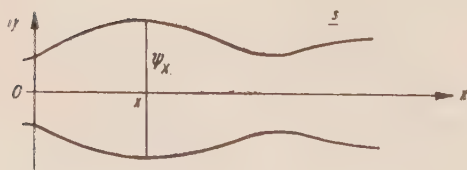
2. Zu jedem x gehört eine endliche, positive Zahl L_x so, daß jede ganz in Ω liegende Strecke der Geraden $R[s] = x$ eine Länge kleiner als L_x hat.

Eine doppelpunktlose, stetige Kurve, welche innerhalb Ω zwei Randpunkte des Gebietes verbindet, heißt Querschnitt des Gebietes.

Wir wollen nur solche Streifengebiete Ω zulassen, die folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. Ω ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.
2. Auf jeder Parallelen zur y -Achse liegt genau ein Querschnitt des Gebietes, ψ_x .
3. Die Längen $\psi(x)$ der Querschnitte ψ_x liegen unter einer gemeinsamen Schranke L .
4. Die Funktion $\psi(x)$ ist in jedem endlichen Intervalle von beschränkter Schwankung.

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz läßt sich das Gebiet Ω konform auf den in der $\sigma = v + i\omega$ -Ebene gelegenen, durch die Ungleichung $|\omega| < \frac{\alpha}{2}$ bestimmten Parallelstreifen T abbilden. Die Abbildung kann so eingerichtet werden, daß die unendlich fernen Punkte der beiden Gebiete einander entsprechen. Die Funktion, durch welche diese Abbildung vermittelt wird, sei $\sigma = \sigma(s) = v(s) + i\omega(s)$.



Die Bildkurven γ_x der Querschnitte ψ_x verbinden offenbar die beiden Ufer von T . Mit $v_1(x)$ bezeichnen wir den kleinsten, mit $v_2(x)$ den größten Wert von $v(s)$ auf dem Querschnitt ψ_x .

Nun sind wir in der Lage, die Ahlforsschen Verzerrungssätze zu formulieren.

3.2. Erster Verzerrungssatz von Ahlfors.

Es sei $x_1 < x_2$, und es gelte $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} > 2$.

Dann besteht die Beziehung:

$$v_1(x_2) - v_2(x_1) \geq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} - 4a. \quad (3.1)$$

3.3. Zweiter Verzerrungssatz von Ahlfors.

Es sei wieder $x_1 < x_2$.

Dann gilt die Ungleichung:

$$v_2(x_2) - v_1(x_1) \leq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} + Q(x_1, x_2), \quad (3.2)$$

wobei

$$Q(x_1, x_2) = 8a + 16aL^2 \frac{\psi_m(x_1 - 4L, x_2 + 4L)^2 + V(x_1 - 4L, x_2 + 4L)}{\psi_m(x_1 - 4L, x_2 + 4L)^4}$$

ist und $\psi_m(x_1 - 4L, x_2 + 4L)$ das Minimum von $\psi(x)$ im Intervalle $x_1 - 4L \leq x \leq x_2 + 4L$ und $V(x_1 - 4L, x_2 + 4L)$ die totale Variation von $\psi(x)^2$ in diesem Intervalle bedeutet.

3.4. Anmerkung. Die beiden Ahlforsschen Verzerrungssätze gelten auch für Gebiete Ω , die entweder endlich oder nur in der einen Richtung unendlich sind.

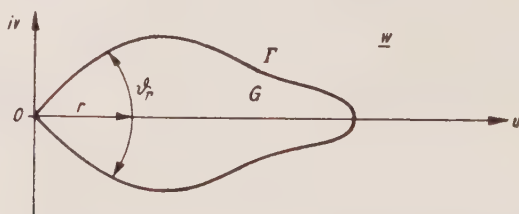
Der erste Ahlforssche Verzerrungssatz ist auch für wesentlich allgemeinere Gebiete gültig, doch genügt es für das Folgende, wenn wir uns auch beim ersten Verzerrungssatz auf unser spezielles Gebiet Ω beschränken.

§ 2. Eine Folgerung der Verzerrungssätze von Ahlfors

3.5. Aus den Ahlforsschen Verzerrungssätzen leiten wir folgenden Hilfssatz ab:

G sei ein einfach zusammenhängendes, von einer Jordankurve Γ begrenztes Gebiet der $w = u + iv$ -Ebene, welches den Nullpunkt als Randpunkt hat. G erfülle folgende Bedingungen:

1. G liegt symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.
2. Auf jedem Kreise um 0 mit Radius r ($0 < r \leq 1$) liegt genau ein Querschnitt von G , ϑ_r . Die Länge dieses Querschnittes bezeichnen wir mit $\vartheta(r)$, den Winkel, unter dem er von 0 aus gesehen wird, mit $\Theta(r)$.
3. Die Funktion $\Theta(r)$ hat im Intervalle $0 < r \leq 1$ eine positive untere Schranke Θ_m .
4. $\Theta(r)$ ist in diesem Intervalle von beschränkter Schwankung.



$\zeta = \zeta(w)$ sei eine Funktion, welche G derart konform auf die Halbebene $\xi > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) abbildet, daß die beiden Nullpunkte einander entsprechen.

Unter diesen Bedingungen existieren zwei positive, von w unabhängige Zahlen C_1 und C_2 so, daß für jedes $w \neq 0$ von G und Γ , dessen Betrag höchstens gleich 1 ist, die Relationen

$$|\zeta(w)| \leq C_1 \cdot e^{-\pi \int_{|w|}^1 \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}} \quad (3.3)$$

und

$$|\zeta(w)| \geq C_2 \cdot e^{-\pi \int_{|w|}^1 \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}} \quad (3.4)$$

gelten.

Zum Beweise bilden wir das Gebiet G mit der Funktion $s = -\log w$ auf das Gebiet Ω der $s = x + iy$ -Ebene ab, welches sich in Richtung der positiven reellen Achse ins Unendliche erstreckt und ganz im Parallelstreifen definiert durch die Ungleichung $|y| < \pi$ gelegen ist. Die Halbebene $\xi > 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) bilden wir mit derselben Funktion $\sigma = -\log \zeta$ ab auf den Parallelstreifen T der $\sigma = v + i\omega$ -Ebene, definiert durch $|\omega| < \frac{\pi}{2}$. Dem Gebiete Ω entspricht T , und zwar so, daß die beiden Punkte ∞ einander zugeordnet sind.

Aus unseren Annahmen über G folgt für Ω :

1. Ω ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.
2. Auf jeder Parallelen zur y -Achse $R[s] = x$ ($x > 0$) liegt genau ein Querschnitt von Ω . ψ_r , ψ_r entspricht dem Querschnitt ϑ_r , falls $x = -\log r$ ist. Seine Länge sei $\psi(x)$. Es gilt für $x > 0$: $\psi(x) = \Theta(r(x)) = \Theta(e^{-x}) \leq 2\pi$.
3. $\psi(x)$ hat im Intervalle $0 \leq x < \infty$ eine positive untere Schranke $\psi_m = \Theta_m (> 0)$.
4. $\psi(x)$ ist in diesem Intervalle von beschränkter Schwankung.

Es sei $x_1 = 8\pi$ und $x_2 \equiv -\log |w|$, wobei w ein vom Nullpunkt verschiedener Punkt von G oder Γ mit $-\log |w| > x_1$ ist. Nach dem ersten Ahlforsschen Verzerrungssatz gilt:

$$v_1(x_2) \geq \pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} + v_2(x_1) - 4\pi \quad (3.5)$$

Deshalb erhalten wir für $\zeta(w)$ die Beziehung:

$$-\log |\zeta(w)| \geq v_1(x_2) \geq \pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} + v_2(x_1) - 4\pi. \quad (3.6)$$

Das Integral von (3.6) läßt sich anders schreiben. Wegen $x = -\log r$ und $dx = -\frac{dr}{r}$ gilt:

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} = \pi \int_{e^{-x_1}}^{e^{-x_2}} \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)} \quad (3.7)$$

Der Ausdruck $v_2(x_1) - 4\pi$ ist von w unabhängig. Daher existiert

eine von w unabhängige Konstante C_1 so, daß für jedes $w \neq 0$ von G und Γ , dessen Betrag höchstens gleich 1 ist, die Ungleichung

$$|\zeta(w)| \leq C_1 \cdot e^{-\pi \int_{|w|}^1 \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}} \quad (3.3)$$

gilt.

Andererseits ergibt sich aus dem zweiten Ahlforsschen Verzerrungssatz:

$$-\log |\zeta(w)| \leq v_2(x_2) \leq \pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\psi(x)} + v_1(x_1) + Q(x_1, x_2). \quad (3.8)$$

Wegen der Bedingungen 3 und 4 ist die Größe $Q(x_1, x_2)$ kleiner als eine von w unabhängige Zahl Q , und daher existiert auch eine von w unabhängige Zahl C_2 derart, daß für jedes $w \neq 0$ von G und Γ mit $|w| \leq 1$ die Relation

$$|\zeta(w)| \geq C_2 \cdot e^{-\pi \int_{|w|}^1 \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}} \quad (3.4)$$

gilt.

§ 3. Anwendung der Ahlforsschen Verzerrungssätze auf die Verallgemeinerung der Carlemanschen Sätze

3.6. Für das in 3.5 definierte Gebiet G der w -Ebene leiten wir aus Kapitel II und dem Hilfssatz von 3.5 folgende beiden Sätze ab:

Satz 3.1. Die Funktion $F(w)$ sei in G regulär analytisch und erfülle für $n=0, 1, 2, \dots$ die Bedingungen

$$|F(w)| \leq a_n^n \cdot |w|^n, \quad (3.9)$$

wobei die a_n eine monotone Zahlenfolge bilden:

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \int_{1/a_n}^1 \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}} \quad (3.10)$$

sei divergent.

Dann verschwindet $F(w)$ identisch.

Satz 3.2. Die Reihe (3.10) sei konvergent. Dann existiert eine in G reguläre, nicht identisch verschwindende Funktion $F(w)$, welche die Ungleichungen (3.9) befriedigt.

Die Richtigkeit dieser beiden Sätze ergibt sich aus den Überlegungen von Kap. II und aus dem Hilfssatz von 3.5. Bedeutet $\eta(r)$ die in 2.1 definierte Funktion und $\eta_1(r)$ den Ausdruck

$$\eta_1(r) = e^{-\pi \int_r^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} \quad (3.11)$$

so folgt aus (3.3) und (3.4), daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{1}{a_n}\right) \quad (3.12)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_1\left(\frac{1}{a_n}\right) \quad (3.10)$$

gleichzeitig konvergieren und divergieren.

Die Funktion $\eta_1(r)$ erfüllt die Bedingungen 3a, b, c von 2.1. Es ist nämlich

$$\eta_1'(r) = e^{-\pi \int_r^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} \cdot \frac{\pi}{r \cdot \Theta(r)} = \eta_1(r) \cdot \frac{\pi}{r \cdot \Theta(r)} \quad (3.13)$$

Falls q eine Zahl größer als 1 ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1(r)}{\eta_1\left(\frac{r}{q}\right)} &= e^{-\pi \int_r^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)} + \pi \int_{r/q}^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} = e^{\pi \int_{r/q}^r \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} \leq \\ &\leq e^{\frac{\pi}{\Theta_m} \int_{r/q}^r \frac{dt}{t}} = q^{\frac{\pi}{\Theta_m}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Daß $\eta_1(r)$ auch die Bedingung 3c erfüllt, sieht man folgendermaßen ein: Wegen (3.13) ist

$$\eta_1'(r) = \frac{\eta_1(r)}{r} \cdot \frac{\pi}{\Theta(r)} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta_1(r)}{r}. \quad (3.15)$$

3.7. Anmerkung. Nach 2.6 bleiben die Sätze 3.1 und 3.2 richtig, wenn wir die Reihe (3.10) ersetzen durch das Integral

$$\int_{r=0}^1 -\log m(r) d e^{-\pi \int_r^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} \quad (3.16)$$

In dieser Form wurden diese beiden Sätze von *S. Mandelbrojt* bewiesen. (Vgl. *S. Mandelbrojt*: *Séries adhérentes, Régularisation des Suites, Applications* (Kap. II).)

IV. Verallgemeinerung der Carlemanschen Sätze auf Warschawski-Gebiete

4.1. Im folgenden wollen wir zeigen, daß für ein Warschawski-Gebiet dieselben Carlemanschen Sätze gelten wie für die Halbebene. Unter einem Warschawski-Gebiet verstehen wir ein einfach zusammenhängendes, von einer Jordankurve Γ begrenztes Gebiet G der $w = u + iv$ -Ebene, welches ganz in der Halbebene $u > 0$ liegt, den Nullpunkt als Randpunkt hat und das Intervall $0 < u \leq 2$ der reellen Achse im Inneren enthält.

A sei der erste Schnittpunkt von Γ mit dem Kreise um 0 mit Radius 2, den man trifft, wenn man den Kreis von der positiven reellen Achse aus in positiver Richtung durchläuft. Analog bezeichnen wir mit B den ersten Schnittpunkt von Γ mit diesem Kreise, den man beim Durchlaufen des Kreises in negativer Richtung trifft. Γ' bedeute denjenigen Teil von Γ , welcher von A und B begrenzt wird und den Nullpunkt enthält.

Von Γ' setzen wir voraus:

1. Für Γ' existiert eine Parameterdarstellung $w(t) = u(t) + i v(t)$, wobei $w(t)$ eine im Intervalle $-T \leq t \leq +T$ stetige Funktion ist, so daß

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{für } t < 0 & v(t) < 0, \\ \text{für } t > 0 & v(t) > 0 \text{ ist und} \\ \text{dem Werte } t = 0 & \text{der Nullpunkt,} \\ & t = +T \text{ der Punkt } A \text{ und} \\ & t = -T \text{ der Punkt } B \text{ entspricht.} \end{array} \right.$$

Ferner existieren zwei positive, von t unabhängige Zahlen k_1 und k_2 derart, daß für $-T \leq t < 0$ und $0 < t \leq +T$ die Beziehung

$$(0 <) k_1 \leq \left| \frac{w(t)}{t} \right| \leq k_2 (< \infty) \quad (4.1)$$

gilt.

2. Die Funktion

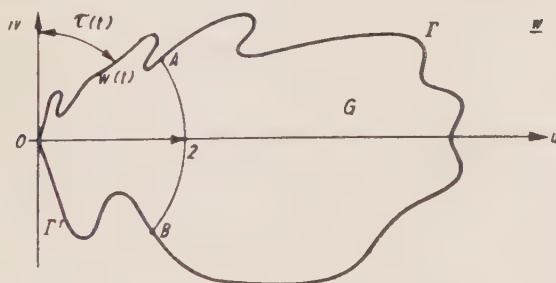
$$\tau(t) \equiv |w(t)| \cdot \left(\frac{\pi}{2} - |\arg w(t)| \right)$$

ist in den Intervallen $0 \leq t \leq +T$ und $-T \leq t \leq 0$ monoton. (Geometrisch bedeutet $\tau(t)$ die Länge des kleinsten Kreisbogens, dessen Mittelpunkt 0 ist und der begrenzt wird vom Punkte $w(t)$ einerseits und der imaginären Achse anderseits.)

3. Die Integrale

$$\int_0^T \frac{\tau(t)}{t^2} dt \quad (4.2) \quad \text{und} \quad \int_{-T}^0 \frac{\tau(t)}{t^2} dt \quad (4.3)$$

sind konvergent.



Zu Voraussetzung 1 haben wir noch zu bemerken:

Die Bedingung, daß der Quotient $\left| \frac{w(t)}{t} \right|$ für $t \neq 0$ zwischen zwei endlichen, von t unabhängigen Schranken liege, ist nach Warschawski⁷⁾ äquivalent mit der sogenannten linearen Unbewalltheit der Kurve Γ im Nullpunkte. Die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\epsilon)$ hat Warschawski in folgender Weise eingeführt:

⁷⁾ Vgl. S. Warschawski [1], S. 355.

Man schlage um 0 einen Kreis mit Radius ϵ . P_1 und P_2 seien die beiden letzten Schnittpunkte dieses Kreises mit der Jordankurve Γ , die man beim Durchlaufen von Γ von 0 aus nach beiden Seiten trifft. $\Delta(\epsilon)$ ist dann der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe, die beide Bögen $0P_1$ und $0P_2$ von Γ enthält.

Der Quotient $\frac{\Delta(\epsilon)}{\epsilon}$ ist seiner Definition nach mindestens gleich 1. Wenn dieser Quotient nach oben beschränkt bleibt, falls ϵ gegen 0 strebt, nennt man die Kurve Γ im Nullpunkte linear unbewallt. Anschaulich gesprochen bedeutet die lineare Unbewalltheit von Γ im Nullpunkte ungefähr, daß Γ in der Umgebung dieses Punktes nicht allzu große Schwankungen macht.

Aus den Voraussetzungen 2 und 3 folgt, daß die imaginäre Achse im Punkte $w=0$ Tangente an die Kurve Γ ist. Andererseits läßt sich aus der Existenz einer Tangente im Nullpunkte die Konvergenz der Integrale (4.2) und (4.3) nicht ableiten.

Für das Warschawski-Gebiet G gelten dieselben Carlemanschen Sätze wie für die Halbebene.

Satz 4.1. Die Funktion $F(w)$ sei in G regulär analytisch und erfülle für $n=0, 1, 2, \dots$ die Bedingungen

$$|F(w)| \leq a_n \cdot |w|^n, \quad (4.4)$$

wobei die a_n eine monotone Zahlenfolge bilden:

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \quad (4.5)$$

sei divergent.

Dann verschwindet $F(w)$ identisch.

Satz 4.2. Die Reihe (4.5) sei konvergent. Dann existiert eine in G regulär analytische Funktion $F(w)$, welche nicht identisch verschwindet und die Bedingungen (4.4) erfüllt.

Die Richtigkeit der Behauptung von Satz 4.2 folgt schon aus der Tatsache, daß G ganz in der Halbebene $u > 0$ enthalten ist. Wir haben daher lediglich Satz 4.1 zu beweisen. Wir führen den

Beweis dieses Satzes in zwei Schritten. Erstens beweisen wir ihn für ein spezielles Warschawski-Gebiet G_1 , und zweitens zeigen wir, daß ein allgemeines Warschawski-Gebiet G ein spezielles Gebiet G_1 als Teilgebiet enthält. Verschwindet die Funktion $F(w)$ im Teilgebiete G_1 identisch, so verschwindet sie wegen der Regularität in ganz G .

4.2. G_1 sei ein einfach zusammenhängendes, von einer Jordankurve Γ_1 begrenztes Gebiet der $w = u + iv$ -Ebene, welches ganz in der Halbebene $u > 0$ liegt, den Nullpunkt als Randpunkt hat und folgende Bedingungen erfüllt:

1. G_1 ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse.
2. Auf jedem Kreise um 0 mit Radius r ($0 < r \leq 1$) liegt genau ein Querschnitt von G_1 . Seine Länge sei $\vartheta(r)$, der Winkel, unter dem er von 0 aus gesehen wird, $\Theta(r) = \frac{\vartheta(r)}{r}$.

Seien A_1 und B_1 die Schnittpunkte des Einheitskreises mit Γ_1 , so folgt, daß der Teilbogen $0A_1$ von Γ_1 die Parameterdarstellung $w = w(r)$ gestattet, wobei r den Abstand des Randpunktes w von 0 bedeutet. Für den Quotienten $\frac{w(r)}{r}$ gilt dann im Intervalle $0 < r \leq 1$:

$$\left| \frac{w(r)}{r} \right| = 1. \quad (4.6)$$

Als weitere Bedingungen fügen wir hinzu:

3. Die Funktion $\tau(r) \equiv \frac{1}{2} r (\pi - \Theta(r))$ ist monoton wachsend.
4. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{\tau(r)}{r^2} dr \quad (4.7)$$

ist konvergent.

Für das Gebiet G_1 gilt Satz 4.1.

G_1 erfüllt alle Voraussetzungen von 3.5. Wie wir in 4.3 zeigen werden, folgt aus der Konvergenz des Integrals (4.7), daß die Funktion $\Theta(r)$ im Intervalle $0 < r \leq 1$ von beschränkter Schwankung ist. Ebenso folgt aus der Konvergenz dieses Integrals, daß $\Theta(r)$ im genannten Intervalle eine positive untere Schranke $\Theta_m (> 0)$ besitzt.

Wir können daher Satz 3.1 anwenden. Es ist

$$\begin{aligned}
 -\pi \int_r^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)} &= - \int_r^1 \frac{\pi - \Theta(t)}{t \cdot \Theta(t)} dt - \int_r^1 \frac{dt}{t} = \\
 &= - \int_r^1 \frac{\pi - \Theta(t)}{t \cdot \Theta(t)} dt + \log r \quad (0 < r < 1).
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Wegen $\pi \geq \Theta(t) \geq \Theta_m$ folgt aus der Konvergenz von (4.7), daß das letzte Integral von (4.8) unter einer endlichen Schranke M bleibt, falls r gegen 0 strebt.

$$\int_r^1 \frac{\pi - \Theta(t)}{t \cdot \Theta(t)} dt \leq M (< \infty), \quad 0 < r \leq 1.
 \tag{4.9}$$

Deshalb gilt für $0 < r \leq 1$ die Beziehung

$$e^{-\pi \int_r^1 \frac{dt}{t \cdot \Theta(t)}} \geq e^{-M \cdot r}.
 \tag{4.10}$$

Daraus folgt aus der Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n},$$

daß auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi \int_{1/a_n}^1 \frac{dr}{r \cdot \Theta(r)}}
 \tag{4.11}$$

divergiert, und damit ist der Beweis erbracht.

4.3. Hilfssatz.

$\tau(r)$ sei eine im Intervalle $0 \leq r \leq 1$ stetige, monoton wachsende Funktion von r , und das Integral

$$\int_0^1 \frac{\tau(r)}{r^2} dr
 \tag{4.12}$$

sei konvergent.

Dann ist die Funktion $\varphi(r) \equiv \frac{\tau(r)}{r}$ im Intervalle $0 < r \leq 1$ von beschränkter Schwankung.

Ist δ eine Zahl zwischen 0 und 1, so bezeichnen wir mit $V(\delta)$ die Schwankung von $\varphi(r)$ im Intervalle $(0 < \delta \leq r \leq 1)$. Dann gilt definitionsgemäß

$$V(\delta) \equiv \int_{r=\delta}^1 |d\varphi(r)| = \int_{r=\delta}^1 d\left(\frac{\tau(r)}{r}\right) \quad (4.13)$$

Aus

$$d\left(\frac{\tau(r)}{r}\right) = \frac{d\tau(r)}{r} - \frac{\tau(r)}{r^2} dr \quad (4.14)$$

folgt:

$$d\left(\frac{\tau(r)}{r}\right) \leq \frac{d\tau(r)}{r} + \frac{\tau(r)}{r^2} dr \quad (4.15)$$

und

$$\int_{r=\delta}^1 d\left(\frac{\tau(r)}{r}\right) \leq \int_{r=\delta}^1 \frac{d\tau(r)}{r} + \int_{r=\delta}^1 \frac{\tau(r)}{r^2} dr. \quad (4.16)$$

Das letzte Integral von (4.16) strebt nach Voraussetzung gegen einen endlichen Grenzwert, falls δ gegen 0 strebt. Für das zweite Integral von (4.16) gilt wegen der Monotonität von $\tau(r)$:

$$\int_{r=\delta}^1 \frac{d\tau(r)}{r} = \int_{r=\delta}^1 \frac{d\tau(r)}{r}. \quad (4.17)$$

Wir erhalten:

$$\int_{r=\delta}^1 \frac{d\tau(r)}{r} = \frac{\tau(r)}{r} \Big|_{r=\delta}^1 + \int_{r=\delta}^1 \frac{\tau(r)}{r^2} dr. \quad (4.18)$$

Es läßt sich zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{\tau(\delta)}{\delta}$$

gegen 0 strebt, falls δ gegen 0 strebt.

Ist nämlich γ eine beliebige Zahl größer als 1, so gilt wegen der Monotonität von $\tau(r)$:

$$\int_{r=\delta}^{\gamma\delta} \frac{\tau(r)}{r^2} dr \leq \tau(\delta) \int_{r=\delta}^{\gamma\delta} \frac{dr}{r^2} = \tau(\delta) \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\gamma\delta} \right) = \frac{\tau(\delta)}{\delta} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}. \quad (4.19)$$

Da γ eine feste Zahl ist, strebt die linke Seite dieser Ungleichung gegen 0, wenn δ gegen 0 strebt (wegen der Konvergenz von (4.12)). Mit Rücksicht auf (4.18) folgt, daß $V(\delta)$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt, falls gegen 0 strebt, und dadurch ist die Behauptung bewiesen.

4.4. Es bleibt noch zu beweisen, daß ein allgemeines Warschawski-Gebiet G ein spezielles Gebiet G_1 als Teilgebiet enthält, welches die Bedingungen von 4.2 erfüllt. Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß in 4.1 das Kurvenstück OA der Randkurve Γ von G ganz außerhalb eines Winkelraumes $|\arg w| < \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$ ($0 < \alpha < 1$) liegt. Dieses Kurvenstück ersetzen wir durch einen neuen Jordanbogen OA^* , welchen wir mit demselben Parameter t darstellen. Sei $w^*(t)$ der dem Parameterwert t ($0 \leq t \leq T$) zugeordnete Punkt des neuen Bogens, $w(t)$ der demselben Werte t entsprechende Punkt des alten Bogens, so soll gelten:

$$1. \quad r(t) \equiv |w^*(t)| = \left(1 - \frac{\alpha}{2} e^{-t}\right) \cdot R(t), \quad (4.20)$$

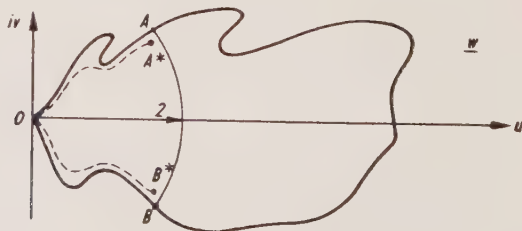
wobei wir unter $R(t)$ die monotone Funktion

$$R(t) \equiv \min_{t \leq \sigma < T} |w(\sigma)| \quad (0 \leq t \leq T)$$

verstehen.

Sei $\tau^*(t)$ die $\tau(t)$ entsprechende Funktion für den neuen Bogen, d. h. die Länge des kleinsten Kreisbogens, dessen Mittelpunkt 0 ist und der begrenzt wird vom Punkte $w^*(t)$ und der imaginären Achse, so fügen wir als weitere Bedingung hinzu:

$$2. \quad \tau^*(t) = \tau(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$



Durch die Bedingungen 1 und 2 ist der neue Jordanbogen $0A^*$ eindeutig bestimmt, und sämtliche Punkte $w^*(t)$ liegen entweder auf Γ oder fallen ins Innere von G . Mit Rücksicht auf (4.1) folgt aus diesen Bedingungen, daß für $0 < t \leq T$ folgende Beziehung gilt:

$$(0 <) \frac{k_1}{2} < \left| \frac{w^*(t)}{t} \right| \leq k_2 (< \infty). \quad (4.21)$$

Der Abstand eines Punktes $w^*(t)$ von 0, $r(t) \equiv |w^*(t)|$, ist offenbar eine monoton wachsende, stetige Funktion von t . Daher kann für die Darstellung des Jordanbogens $0A^*$ r als Parameter gewählt werden:

$$w^*(t) = w^*(t(r)) = W_1(r). \quad (4.22)$$

Wir erhalten ferner

$$\tau^*(t) = \tau(t) = \tau(t(r)) = \tau_1(r) \quad (4.23)$$

für $0 \leq r \leq r_1$, falls wir mit r_1 die Größe $r_1 = r(T)$ bezeichnen.

In gleicher Weise ersetzen wir den Bogen $0B$ durch einen neuen Jordanbogen $0B^*$, welcher die Parameterdarstellung

$$w^* = W_2(r) \quad (0 \leq r \leq r_1)$$

gestattet, wobei r wieder den Abstand eines Punktes von 0 bedeutet. Die $\tau_1(r)$ entsprechende Funktion sei $\tau_2(r)$. Wir behaupten, daß aus der Konvergenz der Integrale

$$\int_0^T \frac{\tau(t)}{t^2} dt \quad (4.24) \quad \text{und} \quad \int_{-T}^0 \frac{\tau(t)}{t^2} dt \quad (4.25)$$

die Konvergenz von

$$\int_0^{r_1} \frac{\tau_1(r)}{r^2} dr \quad (4.26) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{r_1} \frac{\tau_2(r)}{r^2} dr \quad (4.27)$$

folgt. Diese Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß aus der Konvergenz des Stieltjes-Integrals

$$\int_{t=0}^T \frac{d\tau(t)}{t} \quad (4.28)$$

die Konvergenz von

$$\int_{r=0}^{r_1} \frac{d\tau_1(r)}{r} \quad (4.29)$$

folgt. Wie wir in 4.5 zeigen werden, konvergieren und divergieren die Integrale (4.24) und (4.28) gleichzeitig, ebenso (4.26) und (4.29).

Das Stieltjes-Integral

$$\int_{r=\delta}^{r_1} \frac{d\tau_1(r)}{r} \quad (0 < \delta < r_1) \quad (4.30)$$

ist nach Definition der Grenzwert der Summe

$$\sum_{\nu} \frac{\tau_1(r_{\nu}) - \tau_1(r_{\nu-1})}{\bar{r}_{\nu}} \quad (4.31)$$

bei unbeschränkter Verfeinerung der Intervalleinteilung. $\bar{r}_{\nu}$ bedeutet einen Zwischenwert von $r_{\nu-1}$ und r_{ν} . Es sei $t_{\nu} = t(r_{\nu})$ und $\bar{t}_{\nu} = t(\bar{r}_{\nu})$, wobei $t(r)$ die Umkehrfunktion von $r(t)$ ist. Dann gilt wegen (4.23):

$$\frac{\tau_1(r_{\nu}) - \tau_1(r_{\nu-1})}{\bar{r}_{\nu}} = \frac{\tau(t_{\nu}) - \tau(t_{\nu-1})}{\bar{t}_{\nu}} \cdot \frac{\bar{t}_{\nu}}{\bar{r}_{\nu}}, \quad (4.32)$$

und daraus folgt mit Rücksicht auf (4.21)

$$\frac{\tau_1(r_{\nu}) - \tau_1(r_{\nu-1})}{\bar{r}_{\nu}} \leq \frac{2}{k_1} \cdot \frac{\tau(t_{\nu}) - \tau(t_{\nu-1})}{\bar{t}_{\nu}} \quad (4.33)$$

und

$$\sum_{\nu} \frac{\tau_1(r_{\nu}) - \tau_1(r_{\nu-1})}{\bar{r}_{\nu}} \leq \frac{2}{k_1} \sum_{\nu} \frac{\tau(t_{\nu}) - \tau(t_{\nu-1})}{\bar{t}_{\nu}}. \quad (4.34)$$

Bei unbeschränkter Verfeinerung der Intervalleinteilung strebt die Summe der linken Seite dieser Ungleichung gegen (4.30), diejenige der rechten Seite gegen

$$\int_{t=t(\delta)}^T \frac{d\tau(t)}{t} \quad (4.35)$$

Deshalb schließen wir aus der Konvergenz von (4.28), daß auch (4.29) konvergiert.

Nun ersetzen wir die Kurvenstücke $0A^*$ und $0B^*$ durch zwei neue Jordanbögen, $0A_1$ bzw. $0B_1$.

Unter $\bar{\tau}(r)$ verstehen wir die Funktion

$$\bar{\tau}(r) \equiv \max(\tau_1(r), \tau_2(r)) \quad (0 \leq r \leq r_1). \quad (4.36)$$

$0A_1$ stellen wir dar mit demselben Parameter r ($0 \leq r \leq r_1$). Ist $w(r)$ der dem Parameterwert r zugeordnete Punkt des Bogens $0A_1$, so soll gelten:

$$1. \quad |w(r)| = r \quad (4.37)$$

und

$$2. \quad \arg w(r) = \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{\tau}(r)}{r}. \quad (4.38)$$

$0B_1$ sei der zu $0A_1$ in bezug auf die reelle Achse symmetrische Bogen, und A_1B_1 sei der Kreisbogen, welcher A_1 mit B_1 verbindet und dessen Mittelpunkt 0 ist.

Die aus den Kurvenstücken $0A_1$, $0B_1$ und A_1B_1 gebildete Jordankurve Γ_1 begrenzt ein Gebiet G_1 , welches ganz in G enthalten ist und sämtliche Voraussetzungen von 4.2 erfüllt.

4.5. Hilfssatz.

Es sei $\tau(t)$ eine im Intervalle $0 \leq t \leq T$ stetige, monoton wachsende Funktion von t mit $\tau(0) = 0$.

Dann konvergieren und divergieren die Integrale

$$\int_{t=0}^T \frac{\tau(t)}{t^2} dt \quad (4.39) \quad \text{und} \quad \int_{t=0}^T \frac{d\tau(t)}{t} \quad (4.40)$$

gleichzeitig.

Wir zeigen zuerst, daß aus der Konvergenz von (4.39) die Konvergenz des Stieltjes-Integrals (4.40) folgt. Es ist nämlich für $(T >) \delta > 0$:

$$\int_{t=\delta}^T \frac{\tau(t)}{t^2} dt = - \frac{\tau(t)}{t} \Big|_{t=\delta}^T + \int_{t=\delta}^T \frac{d\tau(t)}{t}. \quad (4.41)$$

Nach dem Hilfssatz von 4.3 strebt die Größe

$$\frac{\tau(\delta)}{\delta} \quad (4.42)$$

wegen der Konvergenz von (4.39) gegen 0, wenn δ gegen 0 strebt, und dadurch ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Andererseits gilt im Falle der Konvergenz von (4.40):

$$\frac{\tau(\delta)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_{t=0}^{\delta} d\tau(t) \leq \int_{t=0}^{\delta} \frac{d\tau(t)}{t}. \quad (4.43)$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck (4.42) mit $\delta \rightarrow 0$ gegen 0 strebt, und es folgt aus der Konvergenz von (4.40) auch diejenige von (4.39), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Literaturverzeichnis

- Ahlfors, L.:* [1] Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. Acta Soc. Sci. Fenn. 1930.
- Carleman, T.:* [1] Les Fonctions quasi analytiques. Gauthier-Villars, 1926.
- Nevanlinna, R.:* [1] Eindeutige analytische Funktionen. Berlin: Springer, 1936.
- [2] Uniformisierung. Berlin: Springer, 1953.
- Ostrowski, A.:* [1] Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklung. Acta math. Bd. 53, 1929.
- Warschawski, S.:* [1] Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Zeitschr. Bd. 35, 1932.
- [2] On conformal mapping of infinite strips. Trans. Am. Math. Soc. Bd. 51, 1942.

Curriculum vitae

Am 6. Juli 1928 wurde ich als Bürger von Russikon (Zürich) in Winterthur geboren. Die Primarschule absolvierte ich in Kilchberg (Zürich). Im Frühjahr 1941 trat ich ins Kantonale Gymnasium in Zürich ein, wo ich im Herbst 1947 die eidg. Maturität (Typus A) bestand. Vom Wintersemester 1947/48 an studierte ich an der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich Mathematik, Physik und Astronomie. Ich besuchte Vorlesungen bei den Herren Professoren R. Nevanlinna, R. Fueter †, B. L. v. d. Waerden, P. Finsler, J. J. Burckhardt, L. Locher, M. Gut, H. Jecklin, H. Wyß, H. Staub, W. Heitler, M. Waldmeier und M. Zollinger. Im Frühjahr 1952 bestand ich das Diplom für das höhere Lehramt in mathematisch-physikalischer Richtung. Seit dem Sommersemester 1952 bin ich als Hilfslehrer für Darstellende Geometrie am Kantonalen Realgymnasium in Zürich tätig. Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. R. Nevanlinna, Mitglied der Finnischen Akademie, unter dessen Leitung meine Diplomarbeit „Die Sätze von Denjoy und Borel“ und die vorliegende Dissertation entstanden.

